

算数・数学の問題を解くときに必要とされる「ひらめき」。
 苦手意識のある人は「どうも数学のセンスがないみたいで」などとあきらめてしまいがち。
 でも、たとえ高校・大学入試で出題されるような難問も、
 発想のしかたを体系立てて覚えておけば必ず解けるとするのが、タカハマ式の算数指導法。
 「算数・数学は苦手」という方こそ、必見です！

出題・文＝高濱 正伸先生



〔 隊 列 〕

今、あるスポーツ競技会の開会式が行われようとしています。

出場する各チームは、次のように隊列を組んでいます。

- ◎各列の先頭には、旗を持った人がいます。
- ◎それぞれの列に並んでいる人数はすべて同じです。
- ◎旗を持った人を除くと、列の数と、1つの列に並んでいる人の数は等しくなっています。
- ◎旗を持った人を含めた全員の人数はちょうど100の倍数となっています。

このとき、旗を持った人は、最低何人いるでしょう？

整数問題②

今回のテーマは、思考力問題の代表ともいえる整数問題を突破するための、大切な基礎的視点である「素因数分解」です。

基本知識の一つめとして、「素数」について確認しましょう。定義は「1とその数自身の二つの数によってしか割り切れない数」で、具体的には2・3・5・7・11……など無数に存在します。1は素数ではありません。なぜそんなものに注目する必要があるのかを本当にわかっていただくには、とても多くの問題演習が必要になるのですが、保護者の皆さんには、

「素数」に注目する習慣をもっておくことで、整数問題を解くという最大級の知的喜びを、お子さまに味わってもらえる機会が何度も訪れるのです」といつもお話ししています。

基本知識の二つめは、1でも素数でもない整数は、必ず「素数の積」として表せるということです。それが「素因数分解」で、たとえば $12 = 2 \times 2 \times 3$ 、 $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ と表せます。

人の出自を表すときの本籍地や生年月日などと同じように、整数の性質を表すいちばん大事

な「身分証明書」のような情報が、素因数分解だといえるでしょう。たとえば $2 \times 2 \times 3$ と表せる数はこの世にたった一つ、12しかなく、 $2 \times 2 = 4$ も、 $2 \times 3 = 6$ も12の約数であることなどが一目瞭然となるのです。

ちなみに、もしも1を素数に入れてしまうと、 $1 \times 2 \times 2 \times 3$ も、 $1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 3$ も同じ数を表現することになり、一意性が保証できません。

素因数分解は、多くの場面で解決の決め手になってくれます。有名な例として、 $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 50$ という計算の結果できた整数には末尾に何個0がつくでしょうか、というものがあります。

要するに、素因数分解して計算式を表したとき、 2×5 の組み合わせは全体で何個含まれているかという問題です。素因数2はたくさんあるので5に注目すると、まず5の倍数が10個、さらに 5×5 という素因数が入った数が25と50の2個、だから合計12個と、即答できたりするので。

さあ、素因数分解に注目して、解いてみてください。



問題文の条件から、隊列全体の人数は

「連続する2つの数の積で、かつ100の倍数でもある数」ということになります。

このような問題で、条件にあてはまる数を探し出す重要な手段となるのが、

「素因数分解」です。

〔解答・解説〕

左のように図を書いてみるとわかりやすいのですが、旗を持った人の人数を \square 人とすると、問題文より、隊列全員の人数は、下のように表せます。

$$\square \times (\square + 1) \text{ 人} \quad \cdots \text{①}$$

$\square \times (\square + 1)$ というのは、連続する2つの整数の積であり、かける2つの数は、必ずどちらかが偶数で、どちらかが奇数になっているはずです。

一方で、総人数は100の倍数であることを考えると、同じ人数を

$$100 \times \bigcirc \text{ 人} \quad \cdots \text{②}$$

とも表すことができます。

ここで①より、総人数は「奇数と偶数の連続する2つの数の積」のかたちで表せることから、②も、100を素因数分解した積のかたちにしてみます。すると②は

$$2 \times 2 \times 5 \times 5 \times \bigcirc \text{ 人} \quad \cdots \text{②'}$$

と表すことができます。

「奇数と偶数の連続する2つの数」を見つけるために、②'の素因数に注目すると、 2×2 という素因数は、連続する2つの数のうちの、偶数側に必ず含まれることに気づきます（素因数2が一つでも入ると奇数にならないため）。

2×2 が必ず偶数側に含まれるということはつまり、偶数側は

$$2 \times 2, 2 \times 2 \times 5, 2 \times 2 \times 5 \times 5$$

この3種類のどれかに該当するので、連続する2つの整数を、次の3つの場合に分けて考えます。

- A) 偶数側の数は100 ($2 \times 2 \times 5 \times 5$) の倍数、奇数はとくに条件なし
- B) 偶数が20 ($2 \times 2 \times 5$) の倍数、奇数が5の倍数
- C) 偶数が4 (2×2) の倍数、奇数が25 (5×5) の倍数

A) は、 \square が偶数になる場合と、 $(\square + 1)$ が偶数になる場合の両方があることを考慮すると、

$$\square = 99, 100, 199, 200, \dots$$

などいくつも存在します。 \cdots ③

B) の場合、偶数になる数は一の位が0、奇数になる数は一の位が5となり、2つの数が連続することは絶対にないので、あてはまりません。

C) の場合は、奇数側の下2桁は25か75にしかならないことを利用して考えます。たとえば、

奇数を125とすると、偶数は124か126。124は4の倍数だが126は4の倍数ではないので、考えられるのは

$$\square = 124, \square + 1 = 125 \quad \text{となる時だけです。}$$

このように考えていくと、該当する \square は結局、

$$\square = 24, 75, 124, 175, 224, 275, \dots$$

となります。 \cdots ④

③と④の中で、最小の \square は24であることから、答えは24人となります。

ちなみに、そのときの人数は

$$24 \times 25 = 600 \text{ (人)} \quad \text{となります。}$$

答え 24人

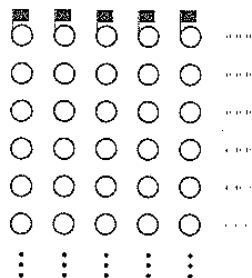
【出題・文】 高濱 正伸(たかはま まさのぶ)

花まる学習会代表。1959年、熊本県生まれ。東京大学 同大学院修士課程卒業。学生時代から予備校等で受験生を指導するなかで、学力の伸び悩み・人間関係での挫折とひきこもり傾向などの諸問題が、幼児期・児童期の環境と体験に基づいていると確信。1993年2月、小学校低学年向けの「作文」「読書」「思考力」「野外体験」を重視した学習教室「花まる学習会」を、同期の大学院生らと設立。算数オリンピック問題作成委員、決勝大会総合解説員、スカイパーフェクトTVの中学生の数学講座講師を務めた。おもな著書に、「小3までに育てたい算数脳」(健康ジャーナル社)、「学力がケタ違いにのびる算数脳の育て方」(幻冬舎)、「考える力がつく算数脳パスル なぞべー」シリーズ(草思社)など。



「後のび」する子の育て方
小4からの算数脳トレーニング

*昨年度のこの連載が単行本になりました。全国の書店、もしくはZ会ホームページからお買い求めいただけます。
<http://www.zkai.co.jp/books/>



約数、倍数を扱う整数問題で注目すべきは「素因数」 組み合わせ方で奇数・偶数が表現できる

全体として、総合思考力問題というにふさわしい、いくつかの典型的な「思考の壁」が存在したことで、難しくなったかもしれません。

その第一は「視覚化」に「絵にすること」。リアリティあふれる人間の並びを想像して、それらしい絵を書いたのでも、一本棒の線で抽象的に人の並びを表現した図で書いたのでも、どちらでもよいのですが、まず、視覚化して考えることができたかどうか

それがくぐったあとの第二ゲートは、□を使っても x を使ってもよいので、とにかく「総人数は連続する2つの数の積として表現される」という発見をできたかどうか。

そして第三番めとして、総人数は100の倍数でもあるのだから、「よーし、素因数分解してみよう」と発想できたかどうか。

ここまでのゲートをくぐったあとも、答えに行き着くまでにいくつか壁が存在します。たとえば、「連続する2つの数の積であるから、片方が奇数、片方が偶数である」という必要条件を上手に利用できたかどうかで、総作業量に差が出たことでしょうか。これは先月号のテーマでした。

具体的な手順としては、素因数に2が2つ、5が2つあるので、それをもとの連続する2整数のどちらに何個振り分けるかということを考えていきます。解答にあげたABC三つの場合以外にも、「一方に $2 \times 5 \times 5$ 、もう片方に2」という場合や「一方に 2×5 、もう片方にも 2×5 」という場合も考えなければならぬように思えますが、「片方が偶数、片方が奇数」という条件があることで、これらは除外

できるのでした。

ちなみに、数学センスが際立った人なら、こんなにくどくどとしたやり方ではなく、100の倍数というところからすぐに25に注目して、「ちょうど 25×24 が連続する2数の積で、100の倍数になる」と、いわゆるひらめきで発見してしまい、あとづけで「そういえば、それより小さいどんな連続2数をかけても、素因数5が2個出てくることはない、だからこれが答えである」とした人もいるでしょう。

それはもちろん才能あふれる証拠です。ただ、そこまでセンスが飛び抜けた人でなくとも、このように思考の壁にぶつかったとき、どんな発想法で乗り越えたかを言葉にして残しておくことが、着実にクリアできるようになるための道なのです。