
zigzag time
1
456

高学年からの「算数脳」ひらめきトレーニング

算数・数学の問題を解くときに必要とされる「ひらめき」。
苦手意識のある人は「どうも数学のセンスがないみたいで」などとあきらめてしまいがち。
でも、たとえ高校・大学入試で出題されるような難問も、
発想のしかたを体系立てて覚えておけば必ず解けるというのが、タカハマ式の算数指導法。
「算数・数学は苦手」という方こそ、必見です！

出題・文＝高濱 正伸先生

Q

◎問1〔1がつく数〕

1から1000までの間に、一つでも1がついている整数はいくつあるでしょうか。

◎問2〔6枚のカード〕

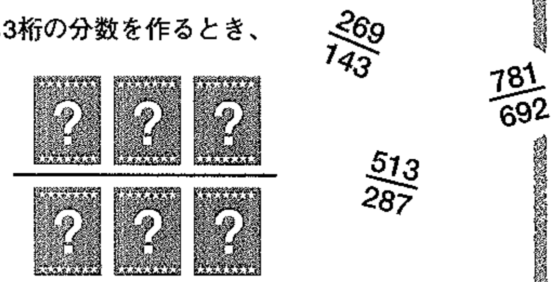
6枚のカードがあります。

このカードには、0でないすべて異なる一桁の数字が書かれています。

いま、このカードを使って、分母と分子がそれぞれ3桁の分数を作るとき、

仮分数（*）は何通りできるでしょうか。

*仮分数：分子が分母と同じか、それより大きい分数。



場合の数②

「場合の数」の特徴の一つは、前回述べたとおり、数えあげるための基準の設定のしかたによって、いろいろな解法が考えられることです。いいかえれば、設定のセンスによって、解ききるのにかかる時間が、かなり違ってきます。

こういう特徴がある「場合の数」の問題は、子どもたちに「別解の楽しみ」を伝えるのに、絶好の分野でもあります。より効率的な解答を思いついた喜びを、体験として実感できる機会が多いからです。

もっというと、めったに発想できないような、「非凡な視点での解答」を示すと、子どもたちは素直に「すごい!」と感動してくれます。さらに、もしも自分の力でそんな解答を思いついたときには、エクスタシーと表現してもいいほどの快感を味わえます。

巷間流行している、いわゆる「アハ体験」ということでしょうが、本当に自分の力で思いついた経験、算数でこういう感動を味わえた経験は、芯からの算数・数学好きを育てますし、先々、多少厳しい問題に遭遇しても、めげずに肯定的に考えぬこうとするエネルギー源にもなるでしょう。

教育において最も大事なポイントとなる瞬間でもあるので、そのような「だれも思いつかなかった、新発想のエレガントな解答」を提示した子がいたとき、わたしはその子を思いっきり誉め、「二〇〇八年、△△君の解」というかたちで記録するようにしています。そのちょっとしたメモをするわたしの姿を見て、彼らの瞳も輝くのです。

今回の問題も、いくつかの別解が考えられます。まずは、地道な方法でもとにかく「自力で解く」ことができれば、すばらしいことですが、とくに今回は、そこでとどまらずに「もっとおもしろい解答はないかな」と、探してみてください。

ほとんど算数の知識は必要なくて、パズルのように遊びのように感じられて、数理的思考力のほとんどをフル活用することができて、たくさんの別解を発想する喜びを感じられる。「場合の数」って、本当にいいですね。

A

場合分けをしてコツコツと数えあげていく方法もありますが、あることに気づけば、非常に短時間で答えに行き着けます。これが、「場合の数」という分野のおもしろみでもあるのです。

◎問1

【コツコツ解答】

1から1000までの数字を次の4つのグループに分けて、1が一つ以上ついている数が何通りあるかを数えます。

a）1桁の数〔1〕　1通りのみ。

b）2桁の数〔10～99〕　10,11,12,13,14,15,16,17,18,19の10通りと、21,31,41,51,61,71,81,91の8通りで、計18通り。

c）3桁の数〔100～999〕

c-1）100～199までの100通り。

c-2）200番台は、201、210～219、221,231,……,291の19通り。
200番台から900番台まであるので、
19×8＝152　で、計152通り。

d）4桁の数〔1000〕　1通りのみ。

よって、1＋18＋100＋152＋1＝272（通り）

答え　272通り

【エレガント解答】

000から999までの3桁の数字と、4桁の数字1000とに分けて考えます。

000～999の3桁の数字について考えると、3桁のうちのどこかに1がついている数字の個数は、000を含む3桁で表せるすべての数字の個数（＊a）から、どこにも1がつかない3桁の数字の個数（＊b）をひいた数、ということになります。

＊aは、一の位、十の位、百の位がそれぞれ10通りある数字の組み合わせだから、
10×10×10＝1000（通り）

＊bは、一の位、十の位、百の位がそれぞれ1以外の9通りある数字の組み合わせになるから、
9×9×9＝729（通り）

よって、1000－729＝271（通り）

これに、4桁の数字1000が加わるから、
271＋1＝272（通り）

答え　272通り

多様な別解の存在を、おもしろがれる子に育てよう

それぞれ二つの解答を見比べれば、解決の速度が全然違うことを、実感してもらえたと思います。

今回のテーマは、視点の斬新な解答に感動できる子どもに育てたいということですし、よりエレガントな解き方が浮かばないかと、考えぬく子を育てたいということです。そしてそれには、「場合の数」という分野は、最高の素材だということを、知っていただきたいのです。

現場で子どもたちに接していると、中3で入会してくるような生徒たちのなかに、九年間の教育の「負の成果」が、はっきりと見て取れます。それはたとえば、「じゃあ、別解を考えてみようか」と言ったときの反応に表れます。「えーっ」「めんどくさーい」。

好奇心・やる気・意欲・集中・思考力などといった言葉とは無縁な、「勉強は、いやなんだけどしかたなくやっている」状態。そんな惨状に、なぜなってしまったのでしょう。

一つには、小さいころから、「『計算が速い』ことが算数ができることだ」という価値観のなかで育てられていること。学習とはすなわち文章題であり、文章題を考えぬく力こそが大事なのに、計算という作業力があればOKというような誤った概念

◎今回のヒント
場合の数の求め方

0でないすべて異なる1桁の整数が書かれたカードが3枚あり、それを使って3桁の整数を作るとします。百の位から順に考えると、

？ ？ ？

百の位　十の位　一の位

百の位に入る数字は3通り、1枚使ったので十の位に入る数字は2通り、2枚使ったので一の位は1通り。よって、

3×2×1＝6（通り）

と計算できます。

【出題・文】 高濱 正伸（たかはま・まさのぶ）

花まる学習会代表。1959年、熊本県生まれ。東京大学・同大学院修士課程卒業。学生時代から予備校等で受験生を指導するなかで、学力の伸び悩み、人間関係での挫折とひきこもり傾向などの諸問題が、幼児期・児童期の環境と体験に基づいていると確信。1993年2月、小学校低学年向けの「作文」「読書」「思考力」「野外体験」を重視した学習教室「花まる学習会」を、同期の大学院生らと設立。算数オリンピック問題作成委員、決勝大会総合解説員、スカイパーフェクTVの中学生の数学講座講師を務めた。おもな著書に『小３までに育てたい算数脳』（健康ジャーナル社）、『学力がケタ違いにのびる算数脳の育て方』（幻冬舎）、『考える力がつく算数脳パズル　なぞぺー』シリーズ（草思社）など。

小4からの算数脳トレーニング
「後のび」する子の育て方

◎問2
［コツコツ解答］

6枚のカードに書かれた数をたとえば1,2,3,4,5,6と考えると、できた分数が仮分数になるのは、要するに、分母の百の位よりも、分子の百の位の数字のほうが大きいとき（もし六つの数字がこれ以外だったとしても同様で、一般性は失われません）。そこで、分母と分子の百の位に注目して場合分けをします。

a）分母の百の位が1のとき

分子の百の位になる数字は、2,3,4,5,6の5通り。

$$\frac{2??}{1??}$$

分子の百の位に一つの数字を入れたとき、

残った十の位と一の位に入る4つの数字の組み合わせは、

4×3×2×1＝24（通り）

したがって、総数は5×24＝120（通り）

b）分母の百の位が2のとき

分子の百の位になる数字は、3,4,5,6の4通り。十の位と一の位に入る4つの数字の組み合わせは、a）と同様で24通りずつ。

したがって、総数は4×24＝96通り。

c）分母の百の位が3のとき　同様に考えて、3×24＝72通り

d）分母の百の位が4のとき　同様に考えて、2×24＝48通り

e）分母の百の位が5のとき　同様に考えて、1×24＝24通り

これらより、総数は120＋96＋72＋48＋24＝360（通り）

答え　360通り

［エレガント解答］

分母より分子のほうが小さい分数（真分数）は、分子と分母を入れ替えると、必ず仮分数になります。つまり、真分数と仮分数は常に一対にあり、6枚のカードの組み合わせでできる分数全体の半分が、仮分数になるというわけです。できる分数の総数は、

6×5×4×3×2×1＝720（通り）

よって、仮分数は　720÷2＝360（通り）

答え　360通り

を、低学年時代にはぐくんでしまった。だから、「思考力をフルに発揮すること」ではなく、「答えを出す」「答えを早く出す」のがよいことだという価値基準をもっている――。

もう一つには、とくに保護者との関係のなかで、NGワード（「なんでわからないの」「何回言えばわかるの」など）を浴びせられて、意欲の泉がふさがってしまっていること。将来の社会人生活を考えても、かわいそうなのは本人です。

別解を楽しめる子に育てましょう。それは、器の大きさであり、思考力の豊かさの証明です。そのためには、場合の数の問題などは、親子で楽しみ、親自身が「こんな解答もあるんじゃないか」と楽しんでみせることが効果的です。教師なり講師なり、指導者が、すぐれた解答例を豊富に示してあげることも有効です。

しかし、いちばん成長著しいのは、友だちどうしで、このような「エレガントな別解」を競いあえるような、切磋琢磨の関係ができあがったときです。よい学校に行く意味も、こういうところにあるのでしょう。いずれにしろ、子どもを取り巻く人みんなが、そういう解答の価値を理解していることが大切なのです。